4.4.19 Kvadratická funkce I

Předpoklady: 040418

Př. 1: Slovo kvadratická už známe, V prvním pololetí jsme řešili kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0$. Jaký bude předpis kvadratické funkce?

Kvadratická rovnice $ax^2+bx+c=0$: hledáme *x*, pro které se hodnota výrazu ax^2+bx+c rovná nule.
Funkce se zabývají hledáním hodnot $\Rightarrow$ kvadratická funkce bude sloužit ke sledování hodnot výrazu ax^2+bx+c $\Rightarrow$ předpis kvadratické funkce: $y=ax^2+bx+c$, podmínka $a\neq 0$ (aby nezmizelo x^2).

Pedagogická poznámka: Zdaleka nejčastějším návrhem na předpis kvadratické funkce je vzorec pro kořeny $y=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Proto se bavíme, kde je ve vzorci nezávislá proměnná a co vlastně funkce znamená (přiřazování hodnot), čímž se postupně dostaneme ke správnému řešení.

Nejjednodušší kvadratická funkce $y=x^2$ (zmizí všechno kromě x^2). Funkce $y=x^2$ (speciální případ kvadratické funkce) se označuje jako **funkce druhá mocnina**.

Př. 2: Jaké vlastnosti bude mít funkce druhá mocnina? Je možné něco říct o jejím grafu?

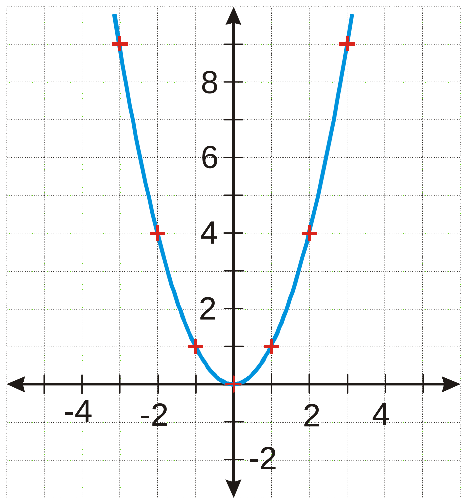
Protože druhá mocnina je vždy nezáporné číslo $\Rightarrow$ hodnoty funkce budou nezáporné, žádná část grafu bude celý pod osou *x*.
Druhé mocniny opačných čísel (například 2 a –2) se rovnají $\Rightarrow$ graf bude souměrný podle osy *y*.

Př. 3: Nakresli graf funkce druhá mocnina $y=x^2$.

Jak vypadá graf? Tabulka hodnot:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Graf:



Nakreslené křivce říkáme **parabola**.

Př. 4: Urči z grafu $D(f)$, $H(f)$ funkce druhá mocnina. Je rostoucí, či klesající (případně v určitém intervalu). Jak se v grafu projevuje skutečnost, že hodnoty *y* nerostou rovnoměrně (jako u lineární funkce), ale rychlost jejich růstu se zvyšuje s rostoucím *x* (když se *x* změní z 0 na 1, vyroste *y* o 1 z 0 na 1, když se *x* změní z 2 na 3 (opět o 1), vyroste *y* o 5 ze 4 na 9).

$D(f) = R$ (dokážeme spočítat x^2 pro všechna reálná čísla)

$H(f) = \langle 0, \infty)$ - z výrazu x^2 nikdy nevyjde záporné číslo

klesající $x \in (-\infty, 0\rangle$ rostoucí $x \in \langle 0; \infty)$

Pedagogická poznámka: Připomeňte studentům, že jediné co se ohledně vlastností kvadratické funkce musejí naučit, je tvar grafu. Všechno ostatní snadno zjistí z něj, stejně jako v předchozím příkladě.

Př. 5: Kterými z následujících bodů prochází graf funkce $y = x^2$?

a) $[-4; -16]$ b) $\left[\frac{4}{9}; \frac{2}{3}\right]$ c) $[11; 121]$ d) $[-0,5; 0,25]$

Stačí dosadit do předpisu funkce.

a) $[-4; -16]$ $y = x^2 = (-4)^2 = 16 \neq -16 \Rightarrow$ bod neleží na grafu funkce $y = x^2$.

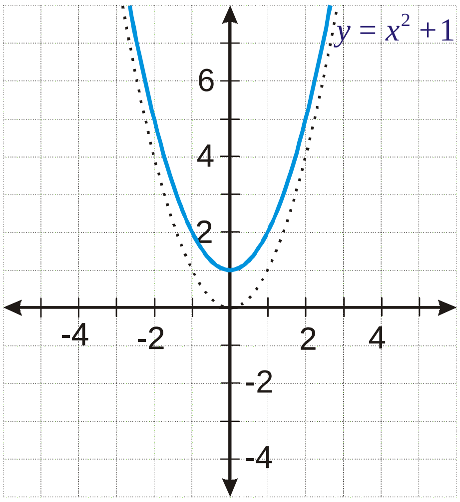
b) $\left[\frac{4}{9}; \frac{2}{3}\right]$ $y = x^2 = \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \left(\frac{16}{81}\right) \neq \frac{2}{3} \Rightarrow$ bod neleží na grafu funkce $y = x^2$.

c) $[11; 121]$ $y = x^2 = 11^2 = 121 \Rightarrow$ bod leží na grafu funkce $y = x^2$.

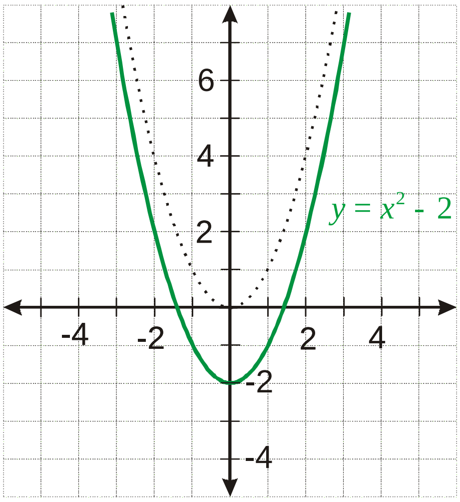
d) $[-0,5; 0,25]$ $y = x^2 = (-0,5)^2 = 0,25 \Rightarrow$ bod leží na grafu funkce $y = x^2$.

Př. 6: Nakresli do jednoho obrázku grafy následujících kvadratických funkcí.
a) $y = x^2 + 1$ b) $y = x^2 - 2$ c) $y = x^2 + 3$
Jaký vliv na graf funkce $y = x^2 + a$ má hodnota parametru a?

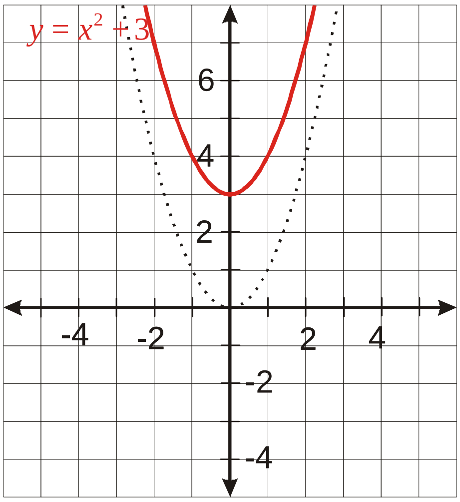
a) $y = x^2 + 1$
Podobné grafu funkce $y = x^2$ je všechny hodnoty vzniknou tím, že přičteme 1 $\Rightarrow$ hodnoty funkce $y = x^2 + 1$ jsou o 1 větší než odpovídající hodnoty funkce $y = x^2$ $\Rightarrow$ graf funkce $y = x^2 + 1$ je posunutý oproti grafu funkce $y = x^2$ o 1 nahoru.



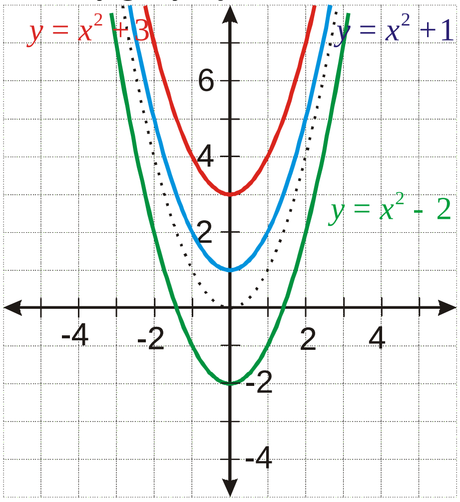
b) $y = x^2 - 2$
Podobné grafu funkce $y = x^2$ je všechny hodnoty vzniknou tím, že odečteme 2 $\Rightarrow$ hodnoty funkce $y = x^2 - 2$ jsou o 2 menší než odpovídající hodnoty funkce $y = x^2$ $\Rightarrow$ graf funkce $y = x^2 - 2$ je oproti grafu funkce $y = x^2$ posunutý o 2 dolu.



c) $y = x^2 + 3$
Podobné grafu funkce $y = x^2$ je všechny hodnoty vzniknou tím, že přičteme 3 $\Rightarrow$ hodnoty funkce $y = x^2 + 3$ jsou o 3 větší než odpovídající hodnoty funkce $y = x^2$ $\Rightarrow$ graf funkce $y = x^2 + 3$ je posunutý oproti grafu funkce $y = x^2$ o 3 nahoru.



Všechny grafy v jednom obrázku.

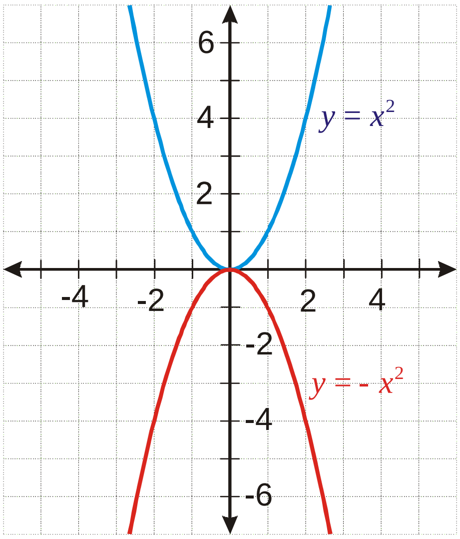


Hodnota parametru *a* rozhoduje u grafu funkce $y = x^2 + a$ o posunutí ve svislém směru.

Př. 7: Nakresli do jednoho obrázku grafy funkcí $y = x^2$ a $y = -x^2$.

$y = -x^2$

Podobné grafu funkce $y = x^2$ je všechny hodnoty vzniknou tím, že hodnotu funkce $y = x^2$ vynásobíme číslem (-1) $\Rightarrow$ hodnoty funkce $y = x^2 + 3$ jsou opačné odpovídajícím hodnotám funkce $y = x^2$ $\Rightarrow$ graf funkce $y = -x^2$ je převrácený oproti grafu funkce $y = x^2$ podle osy *x*.



Př. 8: Která z funkcí $y = x^2 + a$ prochází bodem $[2; -1]$?

Pokud známe bod, který má funkce procházet, můžeme hodnoty *x* a *y* dosadit do předpisu funkce hodnotu parametru *a* dopočítat.

$[2; -1] \Rightarrow -1 = 2^2 + a$

$-1 = 4 + a \qquad / -4$

$a = -5$

Bodem $[2; -1]$ prochází funkce $y = x^2 - 5$.

Shrnutí: Grafem kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$ je parabola („ďolík“).